

**УДК 621.391: 612.82**

**A. M. Молчанов**

**БИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ**

**Предложен новый класс динамических систем, состоящих из многих сильно взаимодействующих компонент. Они допускают точное сведение (типа "самосогласованного" поля) к более простым, размерность которых не зависит от числа компонент.**

Отсутствие предположения о малости взаимодействия существенно отличает предлагаемый подход от известных и позволяет поставить вопрос о моделировании сложных типов кинетики.

**Введение.** Развитие вычислительной техники вдохнуло новую жизнь в старые проблемы математического естествознания. Взникло новое направление (математическое моделирование), удалось решить немало интересных задач. Вполне понятное увлечение привело к идеи (*simulation modelling*), что, "раздробив" сложную систему на элементы, можно промоделировать любую ситуацию. Выяснилось, однако, что приходится вводить много переменных, механизмы взаимодействия содержат много параметров, а получающиеся модели крайне неустойчивы и по параметрам и по переменным. Наступившее разочарование выразительно характеризуется выражением "проклятие размерности", распространившимся несколько лет назад.

**Парное взаимодействие.** Рассмотрим динамическую систему большого числа  $N$  одинаковых компонент

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha(x_i) + \sum_{k=1}^N \beta(x_i, x_k). \quad (1)$$

Механизм парного взаимодействия задается векторной функцией  $\beta(x, y)$  двух векторных аргументов  $x, y$ . Эта функция одна и та же для любой пары компонент  $x_i, x_k$ .

Сравним эту систему с "эталонным" уравнением  $dx/dt = \alpha(x) + \beta(x, x)$ .

"Проклятие размерности" допускает точную количественную меру, "Цена" системы равна  $N^2$ , если принять за единицу цену эталонного уравнения. С другой стороны, число  $N$

(не  $N^2$ , а именно  $N$ ) характеризует меру "атомарности" (блочности) изучаемой сложной системы. Типичные значения

$N$  огромны – число атомов в 1 см<sup>3</sup> газа  $\sim 10^{16}$ , число звезд в галактике  $\sim 10^{11}$ . Широк диапазон  $N$  (от сотен до миллионов и миллиардов) в биологических системах. Общий у всех этих разнообразных систем является невозможность чисто вычислительного подхода не только на современных ЭВМ, но и на ожидаемых в предвидимом будущем.

Эта метафора становится точной, если в соответствии с классическим определением "количество общественно необходимого труда" считать ценой временные затраты ЭВМ.

Необходимы аналитические идеи.

Билинейные системы. Основная идея предлагаемого подхода хорошо видна на примере билинейных систем. Пример этот, к тому же, имеет самостоятельную ценность.

Определение . Система (1) называется билинейной, если функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x, y)$  линейны по своим аргументам.

Проверим, что для таких систем можно "снять заклятие", записав систему иначе.

На первом шаге используем только функции  $\beta(x, y)$  и только по второму ("чужому") аргументу.

Вводя новую ("коллективную") переменную

$$X = \sum_{k=1}^N x_k,$$

получаем уравнение для  $x_i$ :

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha(x_i) + \beta(x_i, X). \quad (2)$$

Уже это уравнение дает существенное продвижение. Из него видно, что  $x_i$  реагирует только на  $X$  целиком, а вовсе не на каждую компоненту  $x_k$  в отдельности, как это казалось при взгляде на уравнение (1).

Следующий шаг оказывается решающим. Используя линейность  $\alpha(x)$  и  $\beta(x, y)$  по "своему" аргументу и складывая все уравнения (2), получаем  $dX/dt = \alpha(X) + \beta(X, X)$ .

Оказывается, что для билинейных систем "коллективная" переменная  $X$  удовлетворяет как раз "эталонному" уравнению. Итак, мы получили систему

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \alpha(X) + \beta(X, X), \\ \frac{dx_i}{dt} &= \alpha(x_i) + \beta(x_i, X), \end{aligned} \quad (3)$$

содержащую на одно (векторное) уравнение больше, чем исходная система. Должно бы стать чуть хуже ( $N+1$  уравнение вместо  $N$ ), но фактически введение существенной переменной  $X$  радикально упрощает ситуацию. Имеют значение два важных

обстоятельства.

Во-первых, уравнение для  $X$  отцепилось от системы – оно не зависит от  $x_i$ . Во-вторых, компоненты  $x_i$  "рассыпались" – каждая из них зависит только от "диспетчера"  $X$ , а не взаимодействует с каждой с каждой, как это было в исходной системе.

Поясним сказанное графами связей для случая  $N=6$

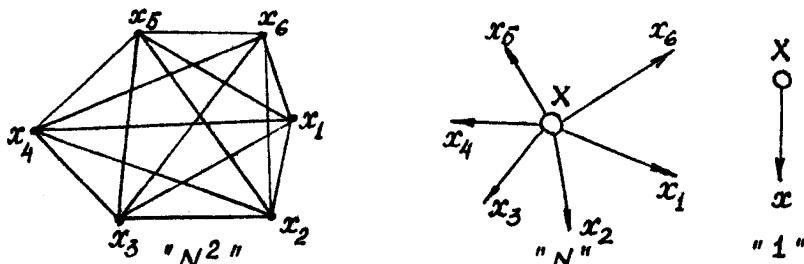


Рис. 1

В исходной системе  $N^2$  взаимосвязей. В расщепленной уже только  $N$  воздействий  $X$  на  $x_i$ . Логическая схема  $(X, x)$  содержит только одно воздействие  $X$  на  $x$ .

Следующий шаг – наиболее важный во всей редукции – переход к системе только двух векторных уравнений, редуцированной системе

$$\frac{dX}{dt} = \alpha(X) + \beta(X, x), \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) + \beta(x, X),$$

в которой полностью исчезло  $N$ . Этот переход основан на том простом, но существенном, соображении, что все уравнения для  $x_i$  в системе (3) одинаковы. Поэтому движение изображающей точки системы в пространстве  $(x_1, \dots, x_N)$  огромной размерности можно заменить движением "россыпи" точек  $(x_1, \dots, x_N)$  в пространстве всего лишь одной компоненты.

Предельный переход  $N \rightarrow \infty$  допускает поэтому замечательную интерпретацию – это переход к рассмотрению фазо-

вого портрета системы (4) в пространстве  $x$ . Такая задача (построение фазового портрета в пространстве  $x$  небольшой размерности и уж во всяком случае размерности, не зависящей от  $N$ ) вполне по силам современной прикладной математике, сочетающей развитые вычислительные алгоритмы с аналитическими методами качественной теории.

**Макродинамика.** Первое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) + \beta(x, x) \quad (5)$$

редуцированной системы естественно назвать уравнением макродинамики, ибо оно описывает поведение системы в целом. Слово "макродинамика" соизгательно выбрано похожим на слово "термодинамика". Но сразу же следует отметить и различия. Во-первых, термодинамика обычно связана с асимптотикой специального класса гамильтоновых систем и в этом смысле значительно тоньше и труднее. Во-вторых, вопреки названию, термодинамика изучает не динамику, а стационарные состояния этих систем. В-третьих, обычный подход термодинамики аксиоматический и существует очень немного доказанных теорем о свойствах предельного перехода  $N \rightarrow \infty$ . Тем не менее, главное сходство состоит именно в постановке вопроса об асимптотическом поведении систем большой размерности. С этой точки зрения билинейные системы весьма полезны, ибо на них можно проверять любые асимптотические предположения. Существует значительно более широкий класс систем, для которых предельный переход  $N \rightarrow \infty$  также сводится к рассмотрению фазового портрета, но их построение, а тем более анализ, выходит за рамки данной статьи.

Возвращаясь к уравнению макродинамики (5), заметим, что оно содержит как частные случаи уравнение Ферхюльста-Перла<sup>\*1</sup>)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta x^2,$$

систему уравнений Вольтэра

---

\*1) Это уравнение подстановкой  $x = p^2$  превращается в уравнение, которое физики называют уравнением Ландау.

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 y + b_2 xy,$$

систему Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\theta z + xy,$$

систему Лотка

$$\frac{dx}{dt} = X(\lambda + a_1 x + a_2 y + a_3 z), \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(\mu + b_1 x + b_2 y + b_3 z),$$

$$\frac{dz}{dt} = Z(\nu + c_1 x + c_2 y + c_3 z),$$

а также другие менее известные системы, из которых следует особенно отметить системы гидродинамического типа [1, 2] динамо Рикитаке [3]. Несколько замечаний об этих уравнениях. Уравнение Ферхюльста возникло в середине прошлого века как ответ на трагический вопрос Мальтуса. Знаменитое решение этого уравнения, получившее название "логическая кривая," описывает простейший (и важнейший) тип переходного процесса. Само уравнение, возникшее в популяционной задаче, применялось затем во многих проблемах математического естествознания.

Сходна судьба системы Вольтерра, возникшей также из популяционной задачи ("хищник - жертва"), нашедшей затем точную (а не приближенную как в исходной проблеме) ингер-претацию в химической кинетике ("холодные пламена").

Система Лоренца обязана своим происхождением гидродинамической проблеме турбулентности.

Весьма любопытна история систем (6) типа Лотка. Сначала она возникла при анализе кинетики некоторой простой химической системы и число уравнений было два. Позже выяснилось, что такие системы, но третьего порядка возникают в популяционных задачах типа "два хищника-жертва" или "две жертвы-хищник", но отсутствие вычислительной техники и практическая невозможность аналитического подхода надолго затормозили исследование этой системы. Затем выяснилось, что системы такого вида возникают при анализе устойчивости движения ("три пары чисто мнимых корней") даже в чисто механических системах, а развитый аппарат теории устойчивости позволил выяснить некоторые общие свойства таких систем. Еще позже такие системы вновь возникли в связи с идеями Эйгена [4] о химической эволюции ("гиперциклы") и их снова изучали заново, как самостоятельный объект. И, наконец, совсем недавно с экономических позиций (вмешательство человека в систему "хищник-жертва") в НИВЦ АН СССР Апонинным Ю. М. и соавторами получено численно сложное поведение такой системы, а именно - цепочка удвоений предельного цикла, приводящая к возникновению перемешивания в системе. Сейчас это обычно называется странным аттрактором.

Основной результат предложенной работы состоит в истолковании любой из перечисленных систем, как эталонного уравнения некоторой многокомпонентной системы. Ясно, что такой подход существенно расширяет поле применимости всех таких систем. Не менее существенно другое обстоятельство. Перечисленные системы перестают быть, при таком подходе, случайным набором исторических курьезов. Они становятся частными случаями единого общего подхода - это эталонные уравнения макродинамики многокомпонентных билинейных систем.

Стационарные режимы эталонного уравнения. Одномерное эталонное уравнение  $dX/dt = aX + bX^2$  всегда есть уравнение Ферхюльста-Перла и заменой переменных  $X = -\frac{a}{b}\xi$ ,  $t = 1/a\tau$  сводится к стандартной форме  $d\xi/d\tau = \xi - \xi^2$ , имеющей три стационарных точки – бесконечно удаленную,  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Обычное истонкование этого уравнения – переходный процесс из окрестности неустойчивого стационара в окрестность устойчивого  $\xi = 1$

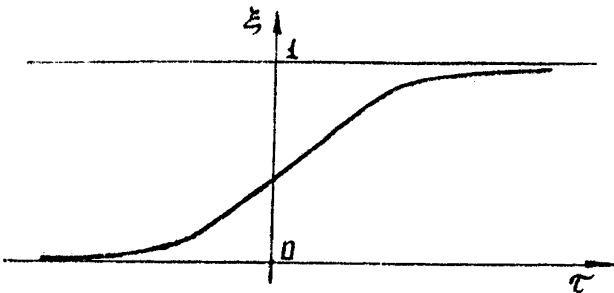


Рис. 2. Логистическая кривая – переходный процесс в устойчивый стационар  $\xi = 1$

Логически возможен и процесс ухода  $\xi \rightarrow -\infty$ , но он воспринимается как взрыв и разрушение системы и поэтому одномерные системы укрепляют представление о единственности "макродинамического" равновесия, перекликающееся с идеей термодинамического равновесия.

Однако положение дел существенно меняется при переходе к двумерному случаю, когда эталонное управление оказывается зависящим от десяти параметров

$$\frac{dX_1}{dt} = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{112}X_1X_2 + b_{122}X_2^2, \quad (7)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_{211}X_1^2 + b_{212}X_1X_2 + b_{222}X_2^2.$$

Многообразие типов кинетики для такой системы существенно больше, но еще допускает достаточно полное перечисление. Понятный анализ не входит в задачу настоящей статьи, но элементы исследования, относящиеся к качественной теории, полезно привести.

Сначала одно важное замечание. Наличие точного эталонного уравнения, описывающего поведение полной системы, позволяет сформулировать гипотезу: существует соответствие между фазовыми переходами и бифуркационными явлениями в уравнении макродинамики.

Обычное представление о фазовых переходах относится к изменению устойчивого стационарного состояния (положения "термодинамического равновесия") в зависимости от изменения внешних параметров системы (чаще всего в зависимости от объема).

Однако точное описание поведения системы в целом (уравнением макродинамики) позволяет расширить понятие фазового перехода на переходы из одного стационарного режима (например, устойчивого равновесия) в другой (например, предельный цикл). Более того, пример системы Лоренца (или приведенный выше пример стохастического режима в системе Лотка) показывает, что число стационарных режимов необходимо включать и квазистохастические (лучше, вероятно, говорить о режимах перемешивания). Соответственно обобщается, конечно, и понятие фазового перехода. Понятно, что все сказанное относится к свойствам билinearных систем и перенос этих соображений на гамильтоновы системы требует дополнительных усилий.

Асимптотика ("окрестность бесконечности") эталонного уравнения. Эталонное уравнение возникает для переменного  $X$ , которое есть сумма всех компонент и (вообще говоря) расгет вместе с  $N$

$$X = \sum_{k=1}^N x_k = Ny.$$

Поэтому после подстановки этого соотношения в (5) и изменения масштаба времени  $t = \frac{1}{N} s$  получим уравнение  $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{N} \alpha(y) + \beta(y, y)$ , которое при  $N \rightarrow \infty$  превращается в однородное  $\frac{dy}{ds} = \beta(y, y)$ .

Применяя эти выкладки к частному случаю (7), получаем двумерную систему

$$\frac{dy_1}{ds} = b_{111} y_1^2 + b_{112} y_1 y_2 + b_{122} y_2^2,$$

$$\frac{dy_2}{ds} = b_{211} y_1^2 + b_{212} y_1 y_2 + b_{222} y_2^2. \quad (8)$$

Разделив одно уравнение на другое, получим однородное уравнение, которое в более привычных обозначениях имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2}{\delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2}. \quad (9)$$

Это уравнение интегрируется разными способами (например, в полярной системе координат).

Качественная картина определяется числом и характером инвариантных лучей  $y = kx$ , которые находятся из кубического уравнения, вытекающего из (9),

$$k = \frac{\alpha + \beta k + \gamma k^2}{\delta + \varepsilon k + \zeta k^2}.$$

Не вдаваясь в детали, приведем фазовые портреты системы (8), являющиеся структурными портретами исходной системы).

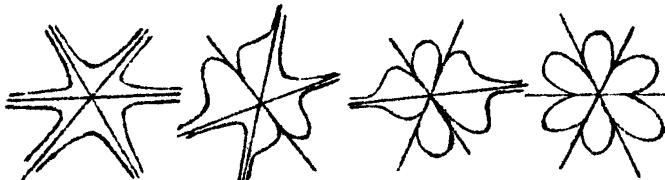


Рис. 3. Разные картины, соответствующие трем действительным корням кубического уравнения

Случай комплексных корней получается слиянием двух лучей. Из четырех возможностей остаются всего две

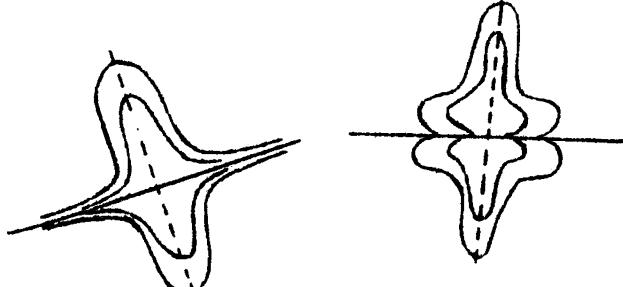


Рис. 4. Фазовые портреты при одном действительном и паре комплексных корней

Более полный анализ должен учитывать линейные члены. Эти члены исчезают только в пределе при  $X \rightarrow \infty$ . Этот предельный переход является общим случаем. Однако можно (и нужно) рассмотреть иной предельный переход  $X \rightarrow X_0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Этот случай соответствует такому подбору начальных данных  $x_i$ , когда их число неограниченно увеличивается, а сумма остается ограниченной. Грубо говоря, это одно условие на большее число компонент. Более точно это соответствует равенству нулю среднего  $\frac{x_1 + \dots + x_N}{N} \rightarrow 0$ , причем стремление к нулю происходит с определенной ( $\sim \frac{1}{N}$ ) скоростью, когда  $N \rightarrow \infty$ .

Возникающее при таком предположении богатство кинетических возможностей значительно больше разобранного, а полный анализ, невозможный без вычислительной техники, выходит за рамки настоящей заметки.

Можно, наконец, сделать еще одно предположение  $X \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . В этом случае остаются только линейные члены и структурный портрет системы сводится к трем известным возможностям – узел, фокус или седло.



Рис. 5. Возможности, возникающие при самом узком предположении  $X \rightarrow 0$

**Заключение.** Система имеет три масштаба начальных данных. Один соответствует малой окрестности  $X \ll X_0$  стационарной точки и поведение системы описывается линейными членами эталонного уравнения  $dX/dt = \alpha(X)$ .

Второй масштаб – “конечные”  $X$  – может возникнуть автоматически из предыдущего (если стационарная точка  $X=0$  неустойчива), либо может быть задан начальными данными.

Эволюция таких состояний описывается полным эталонным уравнением  $dX/dt = \alpha(X) + \beta(X, X)$ .

Если и здесь системе "не за что зацепиться" (отсутствуют устойчивые стационарные режимы), то система автоматически выходит на следующий масштаб (большое  $X$ ). Эволюция описывается старшими членами эталонного уравнения  $dX/dt = \beta(X, X)$ , и соответствующие картины (для двумерного случая) приведены на рис. 3 и рис. 4.

Все сказанное относится к случаю фиксированных значений параметров эволюционного уравнения.

Аналог теории фазовых переходов состояний в анализе изменений структурного портрета в зависимости от изменения параметров системы находится далеко за пределами настоящей работы.

### Литература

1. Обухов А. М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа. - ДАН СССР, 1969, 184, №2, с. 309-312.
2. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. - М.: Наука, 1974. - 160 с.
3. Кук А. Е., Робертс Х. Система двухдискового динамо Рикитаке. - В кн.: Странные аттракторы/Ред.. Я. Г. Синай, Л. П. Щильников. - М.: Мир, 1981, с. 164-192.
4. Эйгэн М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. - М.: Мир, 1973. - 234 с.